球まわりのクリーピング流れ

非圧縮性流体が球形物体をゆっくり通過する問題を考える．図 1 のような x-軸方向に一様な流れの中に球があるとする．x-軸が球の北極と南極を貫くような球座標(r, θ, ϕ)を考える．θ は北極点からの緯度を，ϕ は経度を表す.

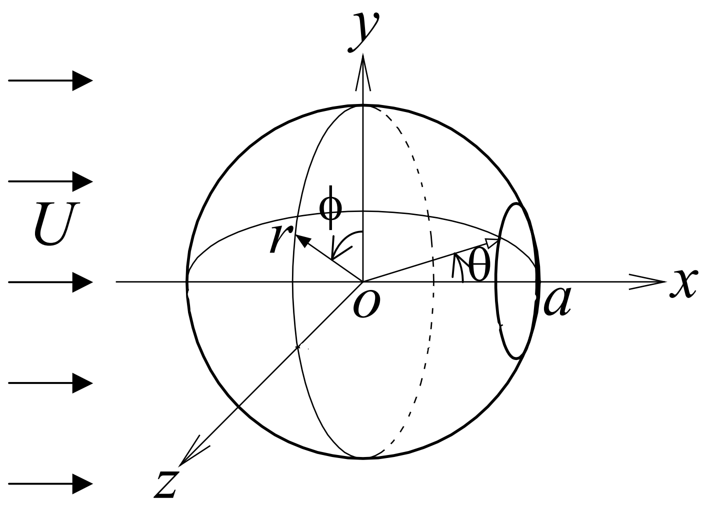


図 1　球まわりの低レイノルズ数流れ　座標軸の取り方
x-軸まわりの小円は緯度 θ =一定の弧を表す

流れを表す Navier-Stokes 方程式(1)において，流速が定常（時間的に一定），かつ非常に小さい（$Re \ll 1$）場合，(1)式の左辺は無視小と考えられる．

$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right)}_{\cong 0}=-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{u} \tag{1}$$

その場合，以下のように圧力による力と粘性力がバランスする．

$$\vec{\nabla}p=\mu\nabla^2\vec{u} \tag{2}$$

このような近似を「ストークス近似」と云い，(2) 式を「ストークス方程式」という．両辺の回転(rot)をとれば，rot (grad p)は恒等的にゼロベクトルになるので，渦度を $\vec{\omega}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$ として，以下の渦度方程式が得られる．

$$\nabla^2\vec{\omega}=\vec{0} \tag{3}$$

渦度ベクトルは球座標系では以下のように表される．

$$
\vec{\omega}=\begin{pmatrix}\omega_r\\ \omega_\theta\\ \omega_\phi\end{pmatrix}=\mathrm{rot}\,\vec{u}=\vec{\nabla}\times\vec{u}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\dfrac{\partial\left(ru_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\left(ru_\theta\right)}{\partial\phi}\right\}\\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\left\{\dfrac{\partial u_r}{\partial\phi}-\dfrac{\partial\left(ru_\phi\sin\theta\right)}{\partial r}\right\}\\ \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial\left(ru_\theta\right)}{\partial r}-\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\right\}\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{\omega}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \omega_\phi\end{pmatrix} \tag{4}
$$

さて，以下では図 1 に示す流れは x-軸まわりで軸対称と仮定する．

x-軸まわりに軸対称であれば，$u_\phi=0,\ \partial/\partial\phi=0$ となるから，(4)式より $\omega_r=0, \omega_\theta=0$ となり，ω_ϕ のみがゼロでないことが分かる．(3)式の渦度方程式の ϕ 成分は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega_\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\omega_\phi\sin\theta\right)\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\underbrace{\frac{\partial^2\omega_\phi}{\partial\phi^2}}_{0}\\
&\quad+\frac{2}{r^2\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial\omega_r}{\partial\phi}}_{0}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial\omega_\theta}{\partial\phi}}_{0}=0
\end{aligned} \tag{5}
$$

と表されるが，軸対称の条件より，結局

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega_\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\omega_\phi\sin\theta\right)\right)=0 \tag{6}
$$

となる．一方，連続の式は球座標系で軸対称なので以下となる．

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2u_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_\theta\sin\theta\right)+\underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}}_{0}=0 \tag{7}
$$

(7)式は変形すると次式のようになるので，

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2u_r\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(ru_\theta\sin\theta\right)=0 \tag{8}
$$

これを自動的に満足するように，流れ関数 ψ（ストークスの流れ関数）を次のように定義する．

$$
u_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad u_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{9}
$$

(4)式の ω_ϕ 成分に，(9)式を代入すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
\omega_\phi&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\\
&=-\frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right]}_{X}=-\frac{X}{r\sin\theta}
\end{aligned} \tag{10}
$$

(6)式に(10)式を代入する．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{X}{r\sin\theta}\right)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{X}{r}\right)\right)=0$$

結局，渦度方程式は流れ関数を用いて，次のように 4 階の常微分方程式で表される．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\psi=0 \tag{11}$$

境界条件は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &u_r=u_\theta=0 \quad (\text{at}\quad r=a) \\ &u_r\to U\cos\theta,\quad u_\theta\to -U\sin\theta \quad (\text{for}\quad r\to\infty) \end{aligned} \tag{12}$$

結局，(11)の微分方程式を(12)の境界条件のもとで解けばよい．そこで，流れ関数の基本解を，以下のような関数の形として仮定する．

$$\psi=r^n\sin^2\theta \tag{13}$$

(13)式を(11)式に代入する．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]r^n\sin^2\theta=0$$

計算していくと，次式を得る．

$$(n-2)(n+1)(n-1)(n-4)r^{n-4}\sin^2\theta=0$$

したがって，n = 1, 2, -1, 4 のとき，(13)式は(11)式を満たす． 4 つの線形結合として表現すると，以下の式になる．係数 A，B，C，D は(12)の境界条件より決定する．

$$\psi=\left(Ar+Br^2+C\frac{1}{r}+Dr^4\right)\sin^2\theta \tag{14}$$

(9)式の流れ関数の定義から，

$$u_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{2}{r^2}\left(Ar+Br^2+C\frac{1}{r}+Dr^4\right)\cos\theta=2\left(A\frac{1}{r}+B+C\frac{1}{r^3}+Dr\right)\cos\theta$$

$$u_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r\sin\theta}\left(A+2Br-C\frac{1}{r^2}+4Dr^3\right)\sin^2\theta=-\left(A\frac{1}{r}+2B-C\frac{1}{r^3}+4Dr^2\right)\sin\theta$$

(12)の境界条件を代入すると，

$$A=-\frac{3}{4}aU,\quad B=\frac{1}{2}U,\quad C=\frac{1}{4}a^3U,\quad D=0 \tag{15}$$

と各係数が決定され，流れ関数と各速度成分は，それぞれ次式のように得られる．

$$\psi = \frac{a^2}{4}\left(\left(\frac{a}{r}\right) + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{r}{a}\right)\right) U \sin^2\theta \tag{16}$$

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U\cos\theta\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)\right) \tag{17}$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} = U\sin\theta\left(\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3 - 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{r}\right)\right) \tag{18}$$

次に圧力を(2)式から計算する．(2)式の球座標系 r 成分は以下のように与えられる．

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2}}_{0}$$
$$-\frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} - \underbrace{\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \phi}}_{0}$$

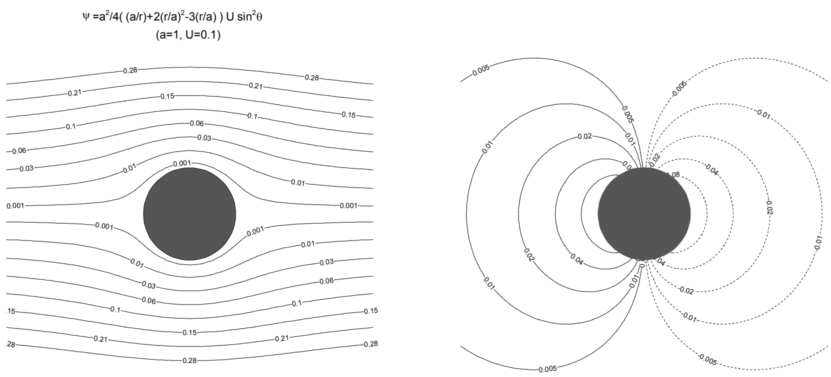
流れの軸対称性より，ϕ 方向微分を落として，

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - \frac{2u_r}{r^2}}_{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)\right)} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta \sin\theta)}{\partial \theta}$$

この式に，(17), (18)式を代入して整理すると，

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 3\mu U\frac{a}{r^3}\cos\theta \tag{19}$$

となる．図 2 は流れ関数，圧力の分布を等高線で描いたものである．



流れ関数 ψ　　　　圧力 p

図 2　球まわりの低レイノルズ数流れ

無限遠点の圧力を p_∞ として，(19)式の両辺を無限遠から r まで積分すると，

$$p - p_\infty = \int_\infty^r \frac{\partial p}{\partial r} dr' = \int_\infty^r 3\mu U \frac{a}{r'^3} \cos\theta \, dr' = 3\mu U a \cos\theta \left[-\frac{1}{2r'^2} \right]_\infty^r = -\frac{3}{2r^2} \mu U a \cos\theta \tag{20}$$

次に剪断応力を求める．粘性応力テンソルは，歪速度テンソルに関係し，球座標の場合，それぞれ以下のように書ける．

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}}_{0} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r}$$

$$e_{\theta\phi} = \frac{\sin\theta}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}\underbrace{\left(\frac{u_\phi}{\sin\theta}\right)}_{0} + \frac{1}{2r\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}}_{0} = 0, \quad e_{\phi r} = \frac{1}{2r\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial u_r}{\partial \phi}}_{0} + \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{u_\phi}{r}\right)}_{0} = 0$$

$$e_{r\theta} = \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

軸対称流れの仮定により，速度の ϕ 成分，および ϕ 方向微分はゼロであるので，

$$\tau_{rr} = \underbrace{2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}}_{2\mu e_{rr}} = 2\mu\frac{\partial}{\partial r}\left[U\cos\theta\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)\right)\right] = \frac{3\mu U}{a}\cos\theta\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \underbrace{2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right)}_{2\mu e_{\theta\theta}} = \frac{3\mu U\cos\theta}{2a}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = \underbrace{2\mu\left[\frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta\cot\theta}{r}\right]}_{2\mu e_{\phi\phi}} = \frac{3}{2}\mu\frac{U\cos\theta}{a}\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^4\right]$$

これらをまとめて

$$\tau_{rr} = -2\tau_{\theta\theta} = -2\tau_{\phi\phi} = \frac{3\mu U}{a}\left[-\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]\cos\theta \tag{21}$$

と書けるが，各法線応力は，球面上（$r = a$）においてゼロであることがわかる．また接線応力は，

$$\tau_{r\theta} = 2\mu\underbrace{\left[\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]}_{e_{r\theta}} = -\frac{3\mu U}{2a}\left(\frac{a}{r}\right)^4\sin\theta \tag{22}$$

(20)式と(22)式から，球面上に作用する圧力および剪断応力をそれぞれ面積分して x 方向の抗力を求める．

$$F_x = -\int_S p\big|_{r=a}\cos\theta\, dS - \int_S \tau_{r\theta}\big|_{r=a}\sin\theta\, dS = -\int_S\left(p_\infty - \frac{3}{2a}\mu U\cos\theta\right)\cos\theta\, dS + \int_S\frac{3\mu U}{2a}\sin^2\theta\, dS$$

ここで，微小面積は，$dS = 2\pi(a\sin\theta)a\,d\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
F_x = D &= \int_S \frac{3\mu U}{2a}\sin^2\theta \, dS - \int_S \left(p_\infty - \frac{3}{2a}\mu U \cos\theta \right) \cos\theta \, dS \\
&= 2\pi a^2 \frac{3\mu U}{2a} \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta - 2\pi a^2 p_\infty \int_0^\pi \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta + 2\pi a^2 \frac{3}{2a}\mu U \int_0^\pi \cos^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \\
&= 3\pi a \mu U \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta \right]_0^\pi - 2\pi a^2 p_\infty \underbrace{\left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta) \right]_0^\pi}_{0} + 3\pi a \mu U \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^\pi
\end{aligned}
$$

$$
D = 4\pi a \mu U + 2\pi a \mu U = 6\pi a \mu U \tag{23}
$$

この結果は，低レイノルズ数の流れにおいて，球に働く抵抗力が速度 U に比例することを示しており，ストークスの抵抗の法則と呼ばれる．抵抗の内訳は，粘性：圧力＝２ ： １である．無次元の形で表すために，抵抗係数 C_D を

$$
C_D \equiv \frac{D}{(1/2)\rho U^2 S} = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 \left(\pi a^2\right)} \tag{24}
$$

と定義する．ここで，S は球の投影面積である．

$$
C_D = \frac{6\pi\mu U a}{(1/2)\rho U^2 \left(\pi a^2\right)} = \frac{12\mu}{\rho U a} = \frac{24}{\underbrace{\left(2\rho U a/\mu\right)}_{Re}} = \frac{24}{Re} \tag{25}
$$

ここで，Re は直径を代表長さとしたレイノルズ数である．(25)式は $Re << 1$ の場合にしか適用できない．